

Reference
copy

Reg. No. :

D 1001

Q.P. Code : [07 DMA 01]

(For the candidates admitted from 2007 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MAY 2013.

First Year

Part III — Mathematics

CLASSICAL ALGEBRA AND CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

Answer any FIVE questions.

(5 × 20 = 100)

1. (a) If n is a positive integer, prove that the coefficient of x^n in the expansion of $\frac{(3x-2)^n}{(1-x)^2}$ is $1-2n$.

- (b) Sum the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} x^n$.

- (c) Show that

$$\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^5 + \dots$$

(அ) n என்பது நிறை முழு எண் எனில் $\frac{(3x-2)^n}{(1-x)^2}$ -ன்

விரிவாக்கத்தில் x^n -ன் கெழு $1-2n$ என நிரூபி.

(ஆ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} x^n$ எனும் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

(இ) $\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^3$

$+ \frac{1}{5}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^5 + \dots$ எனக் காண்.

2. (a) State and prove comparison test.

(b) If $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are convergent sequence, prove that $\{a_n + b_n\}$ is also a convergent sequence.

(c) Test the convergence of the series

$$\sum_1^{\infty} (\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}).$$

(அ) ஒப்பிட்டுச் சோதனையைக் கூறி நிரூபி.

(ஆ) $\{a_n\}$ மற்றும் $\{b_n\}$ ஆகியவை ஒருங்குதல் தொடர்கள் $\{a_n + b_n\}$ என்பதும் ஒருங்கும் என நிரூபி.

(இ) $\sum_1^{\infty} (\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ எனும் தொடரின்

ஒருங்குதல் தன்மையை ஆராய்க.

3. (a) Prove that an absolutely convergent series is convergent.
- (b) State and prove Cauchy's condensation test.
- (c) Solve the equation $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = 0$ given that one of the roots is $1 - \sqrt{5}$.

(அ) அறவே ஒருங்கும் தொடர் ஒருங்கும் என நிரூபி.

(ஆ) காஷியின் ஒடுக்கற் சோதனையைக் கூறி நிரூபி.

(இ) $1 - \sqrt{5}$ என்பது $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனில் இச்சமன்பாட்டைத் தீர்.

4. (a) Show that the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are in Arithmetic progression if $2p^3 - 9pq + 27r = 0$.

(b) Show that the sum of the eleventh powers of the roots of $x^7 + 5x^4 + 1 = 0$ is zero.

(அ) $2p^3 - 9pq + 27r = 0$

எனில் $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கூட்டுத் தொடராக இருக்கும் என நிரூபி.

(ஆ) $x^7 + 5x^4 + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் பதினோராம் அடுக்குகளின் கூடுதல் பூச்சியம் என நிரூபி.

5. (a) Find the root between 0 and 1 correct to 3 places of decimals of the equation $x^3 + 18x - 6 = 0$.

(b) Find the evolute of the parabola $y^2 = 4ax$.

(அ) $x^3 + 18x - 6 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் 0 மற்றும் 1-க்கு இடையேயான ஒரு மூலத்தை சரியாக 3 தசம இலக்கங்களில் காண்க.

(ஆ) $y^2 = 4ax$ எனும் பரவளையத்தின் வரைவரை செங்கோட்டுத் தழுவினையைக் காண்க.

6. Evaluate the following:

(a) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(x-\alpha)(\beta-x)}, \beta > \alpha$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

(c) $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 2}$

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(அ) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(x-\alpha)(\beta-x)}, \beta > \alpha$

(ஆ) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

(இ) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+2x^3+2}$

7. (a) Establish a reduction formula for $\int \sin^n x dx$.

(b) Find the entire area of the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

(அ) $\int \sin^n x dx$ -ன் சுருக்க வாய்பாட்டை நிறுவுக.

(ஆ) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ எனும் வளைவின் முழு பரப்பளவைக் காண்க.

8. (a) By changing the order of integration, evaluate $\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy$.

(b) Express $\int_0^1 x^m (1-x^m)^p dx$ in terms of Gamma function and evaluate $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx$.

(அ) தொகையீடலின் வரிசையை மாற்றி $\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy -$
 x மதிப்பிடுக.

(ஆ) $\int_0^1 x^m (1-x^m)^p dx$ என்பதை காமா சார்பு வடிவத்தில்
மாற்றி $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^{10} dx - x$ மதிப்பிடுக.